Teorema del differenziale, composizione con cammini e derivate direzionali

Teorema del differenziale

Teorema 1 (Teorema del differenziale)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in Ω. Se (tutte) le derivate parziali*

$$\partial_i F:\Omega\to\mathbb{R},\quad i=1,\dots,d,$$

sono continue nel punto $X\in\Omega$, allora F è differenziabile in X.

Dimostrazione in dimensione due. Sia $X=(x,y)$.
Per il teorema di Rolle, dato $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, esistono $h'\in(0,h)$ e $k'=(0,k)$ tali che

$$\begin{aligned}F(x+h,y+k)-F(x,y)&=\Big(F(x+h,y+k)-F(x+h,y)\Big)+\Big(F(x+h,y)-F(x,y)\Big)\\&=k\,\partial_yF(x+h,y+k')+h\,\partial_xF(x+h',y).\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}F(x+h,y+k)-&F(x,y)-h\,\partial_xF(x,y)+k\,\partial_yF(x,y)\\&=k\Big(\partial_yF(x+h,y+k')-\partial_yF(x,y)\Big)+h\Big(\partial_xF(x+h',y)-\partial_xF(x,y)\Big).\end{aligned}$$

Usando la continuità di ∂_xF e ∂_yF, abbiamo che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Big(\partial_yF(x+h,y+k')-\partial_yF(x,y)\Big)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Big(\partial_xF(x+h',y)-\partial_xF(x,y)\Big)=0.$$

Si ha quindi che

$$k\Big(\partial_yF(x+h,y+k')-\partial_yF(x,y)\Big)+h\Big(\partial_xF(x+h',y)-\partial_xF(x,y)\Big)=o\Big(\sqrt{h^2+k^2}\Big),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 2. *Tutte le funzioni ottenute facendo somme, prodotti e composizioni di funzioni elementari (x^n, e^x, $\sin x$, $\cos x,\dots$), calcolate nei vari componenti di $X=(x_1,x_2,\dots,x_d)$, sono funzioni differenziabili (dove sono definite). Per esempio, la funzione*

$$F(x,y)=\frac{\sqrt{e^{xy}-x^2}}{1+\sin y}$$

è differenziabile sul suo dominio di definizione.

Corollario 3 ($C^1(\Omega)\subset C^0(\Omega)$)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ ed $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione. Se $F:\Omega\to\mathbb{R}$ è di classe $C^1(\Omega)$, ovvero F è derivabile in ogni punto di Ω e le sue derivate parziali*

$$\partial_jF:\Omega\to\mathbb{R}\qquad j=1,\dots,d$$

sono funzioni continue su Ω, allora anche la funzione F è continua su Ω.

Dimostrazione. Segue dal Teorema del differenziale e dal fatto che le funzioni differenziabili sono continue. □

Corollario 4 ($C^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $C^2(\Omega)$, ovvero F è derivabile in ogni punto di Ω, le sue derivate parziali*

$$\partial_j F : \Omega \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \dots, d$$

sono funzioni derivabili su Ω e le derivate parziali seconde

$$\partial_i(\partial_j F) : \Omega \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \dots, d; \quad i = 1, \dots, d,$$

sono funzioni continue su Ω, allora la funzione $F \in C^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Segue dal corollario precedente applicato prima alle derivate parziali (prime) di F e poi a F stessa. □

Composizione di funzioni differenziabili con curve derivabili

Teorema 5. *Siano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ una funzione differenziabile nel punto $t_0 \in \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\gamma(t_0)$. Allora la funzione composta $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in t_0 e*

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot \nabla F\big(\gamma(t_0)\big).$$

Dimostrazione in dimensione due. Poniamo

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \text{e} \qquad \gamma(t_0) = \big(x_0, y_0\big).$$

Siccome, per ipotesi, F è differenziabile in (x_0, y_0) abbiamo che la funzione

$$\varepsilon(H, K) := F(x_0 + H, y_0 + K) - \Big[F(x_0, y_0) + H\,\partial_x u(x_0, y_0) + K\,\partial_y F(x_0, y_0)\Big]$$

è un $o\big(\sqrt{H^2 + K^2}\big)$, ovvero

$$\lim_{(H,K)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(H, K)}{\sqrt{H^2 + K^2}} = 0.$$

Ora, ponendo

$$H(t) := x(t_0 + t) - x(t_0) \qquad \text{e} \qquad K(t) := y(t_0 + t) - y(t_0),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big[F\big(x(t_0 + t), y(t_0 + t)\big) - F\big(x(t_0), y(t_0)\big)\Big] \\
&\qquad = \frac{1}{t}\Big[F\Big(\big(x(t_0 + t) - x_0\big) + x_0\,,\ \big(y(t_0 + t) - y_0\big) + y_0\Big) - F\big(x_0, y_0\big)\Big] \\
&\qquad = \frac{1}{t}\big(x(t_0 + t) - x(t_0)\big)\,\partial_x F(x_0, y_0) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{h}\big(y(t_0 + t) - y(t_0)\big)\,\partial_y F(x_0, y_0) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{t}\varepsilon\Big(x(t_0 + t) - x(t_0)\,,\ y(t_0 + t) - y(t_0)\Big).
\end{aligned}$$

Siccome x e y sono funzioni di una variabile derivabili in t_0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(x(t_0 + t) - x(t_0)\big)\,\partial_x F(x_0, y_0) = x'(t_0)\,\partial_x F(x_0, y_0)\,,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(y(t_0 + t) - y(t_0)\big)\,\partial_y F(x_0, y_0) = y'(t_0)\,\partial_y F(x_0, y_0)\,.$$

Ora, usando di nuovo la derivabilità di x e y in zero abbiamo che

$$H(t) = O(t) \qquad \text{e} \qquad K(t) = O(t).$$

e quindi anche

$$\sqrt{H(t)^2 + K(t)^2} = O(t).$$

Di conseguenza,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\varepsilon\big(H(t), K(t)\big) = \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{\varepsilon\big(H(t), K(t)\big)}{\sqrt{H(t)^2 + K(t)^2}} \frac{\sqrt{H(t)^2 + K(t)^2}}{t} \right\} = 0.$$

□

Derivate direzionali

Definizione 6. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Siano $X_0 \in \Omega$ un punto di Ω e $\nu \in \mathbb{R}^d$ un vettore di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che*

la funzione F è derivabile nella direzione ν nel punto X_0

se la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + t\nu)$$

è derivabile in $t = 0$. La sua derivata in zero si indica con

$$\partial_\nu F(X_0) := \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(X_0 + t\nu).$$

e prende il nome di **derivata direzionale** *(di F in X_0 e nella direzione ν).*

Osserviamo che, per il teorema della derivata di una funzione composta, se la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in X_0, allora F è derivabile (nel punto X_0) nella direzione ν e la derivata direzionale si può calcolare usando la formula

$$\partial_\nu F(X_0) = \nu \cdot \nabla F(X_0).$$

In particolare, questo implica che se per una qualche funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}$ esistono sia la derivata direzionale $\partial_\nu G(X_0)$ che le derivate parziali $\partial_{x_1} G(X_0),\ \partial_{x_2} G(X_0), \dots,\ \partial_{x_d} G(X_0)$, ma si ha che

$$\partial_\nu G(X_0) \neq \nu \cdot \nabla G(X_0),$$

allora la funzione G non è differenziabile in X_0.

Esempio 7. *L'esistenza delle derivate direzionali non garantisce la differenziabiltà (e nemmeno la continuità) di una funzione. Infatti, la funzione*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \textit{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

è derivabile in ogni direzione $\nu = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (nell'origine) e la derivata direzionale $\partial_\nu F(0,0)$ è data da

$$\partial_\nu F(0,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(ta, tb) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

In particolare, si ha che

$$\partial_x F(0,0) = 0 \qquad e \qquad \partial_y F(0,0) = 0.$$

Tuttavia, F non è differenziabile in zero, visto che quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, si ha che

$$\partial_\nu F(0,0) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \neq 0 \qquad \textit{mentre} \qquad \nu \cdot \nabla F(0,0) = a\,\partial_x F(0,0) + b\,\partial_y F(0,0) = 0.$$

I seguenti due esercizi sono dedicati ad altri due esempi di funzioni che ammettono derivate direzionali in tutte le direzioni ma non sono differenziabili in zero. In particolare, in Esercizio 8, la funzione F non è nemmeno continua in zero!

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) *Mostrare che per ogni vettore* $\nu = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *la funzione (di una variabile)*

$$t \mapsto F(t\nu)$$

è derivabile in $t = 0$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(t\nu) = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & se \quad a \neq 0, \\ 0 & se \quad a = 0 \end{cases} .$$

(ii) *Mostrare che la funzione* F *non è continua in* $(0,0)$.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) *Mostrare che per ogni vettore* $\nu \in \mathbb{R}^2$ *la funzione (di una variabile)*

$$t \mapsto F(t\nu)$$

è derivabile in $t = 0$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(t\nu) = 0.$$

(ii) *Mostrare che la funzione* F *è continua in* $(0,0)$.

(iii) *Mostrare che la funzione* F *non è differenzibile in* $(0,0)$.

Esercizi sulle derivate di funzione composte

Esercizio 10. *Date la funzione F e la curva γ calcolare la derivata* $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t))$ *della funzione composta $F \circ \gamma$ in 0.*

(1) $\gamma(t) = \Big(t + \cos t \sin(t^2)\,,\ t^2 + e^t - 1\Big)$ *e* $F(x, y) = \cos x \sin y + \sin(xy^2)$.

(2) $\gamma(t) = \Big(\cos(t + t^2)\,,\ \sin\big(t^2\big)\Big)$ *e* $F(x, y) = x^2 e^y$.

(3) $\gamma(t) = \Big(\cos(t^2)\,,\ \sin\big(t + t^2\big)\Big)$ *e* $F(x, y) = ye^x$.

(4) $\gamma(t) = \Big(t + t^2\,,\ t + \sin^3 t\Big)$ *e* $F(x, y) = x\cos(3y) + y\cos(2x)$.

(5) $\gamma(t) = \Big(e^t - \cos t\,,\ \sin(t + t^2)\Big)$ *e* $F(x, y) = x + \sin(2y) + \sin(xy) + \sin(x^3y^3) + \sin(x^5y^5)$.

(6) $\gamma(t) = \Big(t \cos t\,,\ \cos t\Big)$ *e* $F(x, y) = \ln y + x\sin(xy)\ln y$.

Esercizio 11. *Date la curva*

$$\gamma(t) = \Big(t + (\ln t)^2, t^3\Big),$$

e la funzione

$$F(x, y) = \ln\big(xy + \sin(x - y)\big),$$

calcolare la derivata $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} F(\gamma(t))$ *della funzione composta $F \circ \gamma$ in $t = 1$.*

Dagli appelli precedenti

Esercizio 12 (Gennaio 2021 - versione 1)**.** *Consideriamo la curva*

$$\gamma(t) = (\sin(t + t^2), 2t - t^2)$$

e la funzione

$$F(x, y) = y\sin(x + xy) + x\cos(y + xy)$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ della funzione composta $t \mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t = 0$.

Esercizio 13 (Gennaio 2021 - versione 2)**.** *Consideriamo la curva*

$$\gamma(t) = (\sin(t + t^2), 2t - t^2)$$

e la funzione

$$F(x, y) = y\cos(x + xy) + \sin(y + xy)$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ della funzione composta $t \mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t = 0$.

Esercizio 14 (Febbraio 2021 - versione 1)**.** *Consideriamo la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*

$$\gamma(t) = \Big(\sqrt{1 + 4\sin t} - 1\,,\ \sin(4t - 2t^2)\Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x - y + xy + x^2y^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ in 0:

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 15 (Febbraio 2021 - versione 2). *Consideriamo la curva* $\gamma : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\sin(2t - t^2)\,,\ \frac{1}{1+2t} - \frac{1}{1-t} \Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = (1 - x - xy)(1 - y)^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ *in* 0*:*

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 16 (Aprile 2021 - versione 1). *Consideriamo la curva* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\sqrt{t \sin(4t)}\,,\ e^{2t} - e^{-t} \Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x - y + xy + x^2 y^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ *in* 0*:*

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 17 (Aprile 2021 - versione 2). *Consideriamo la curva* $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\ln(1 + 2t)\,,\ \frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+t} \Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = (1 - 2y)(1 + x)^3.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ *in* 0*:*

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 18 (Giugno 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = \cos(2x + y) + \sin(y - xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = (t + t^2, \sin(3t)).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$*.*

Esercizio 19 (Giugno 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = e^{x+2y} + \ln(1 + 2y + xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = \big(\sin(3t)\,,\ t^2 - t \big).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$*.*

Esercizio 20 (Luglio 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = \sin(x + 2y) + \ln(1 + 3y - xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = \big(e^{3t+t^2} - e^{-t}\,,\ t - t^3 \big).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$*.*

Esercizio 21 (Settembre 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = \cos(3x - 3 + 2y) + \sin(3y - x + 1)$$

e la curva

$$\gamma(t) = e^t \big(\cos(t)\,,\ \sin(t) \big).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$*.*